BOMBAMENT DE COLUMNES I DISSENY DE TURBINES HIDRÀULIQUES AMB L. EULER*

per

CARLES PERELLÓ I VALLS

Secretari d'actes de la Secció de Matemàtiques de la SCCFQM

Ningú com EULER per a fer-nos veure com la matemàtica ja feta s'aplica a problemes pràctics i com el tractar de resoldre problemes pràctics genera nova matemàtica.

D'una banda, EULER utilitza el seu càlcul de variacions per a resoldre el problema de la forma que prendrà una columna quan es bomba (s'arqueja) sota l'acció de forces colineals que la premen pels extrems. D'una altra, dissenya turbines hidràuliques i, en fer-ho, contribueix de manera definitiva a la teoria del moviment dels fluids i de l'aparell matemàtic que hi va associat.

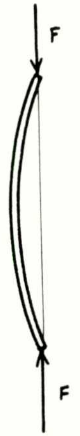
El primer ho fa, a més d'altres coses, a *"De Curvis Elasticis"*, *Additamentum I* al seu llibre sobre càlcul de variacions, el *"Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive propietates gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo senso accepti"*, publicat el 1744 per MICHUELUM BOUSQUET, de Lausana i Ginebra (està traduït a l'alemany a la col·lecció *"Ostwalds Klassiker"*, Leipzig 1910, i l'*Additamentum I* també ho està a l'anglès a la revista Isis de l'any 1933. Totes dues traduccions són a la Biblioteca de Catalunya). El segon ho fa a la *"Theorie plus complete des machines qui son mises en mouvement par la réaction de l'eau"*, publicat a

* Aquest material fou exposat en una conferència dins un cicle dedicat a L. EULER per la S.C.C.F.Q.M. la primavera del 1982.

l'Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlín el 1756. (A la Biblioteca de Catalunya es troba la traducció a l'alemany dis la col·lecció "*Ostwalds Klassiker*").

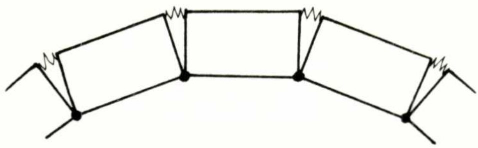
Un problema interessant en l'estudi del bombament de columnes és el següent: si premem una barra elàstica recta pels extrems (podem imaginar una columna suportant un pes), amb una certa força F dirigida axialment, i la desviem de la posició rectilínia aplicant una forç transversal, en deixar d'aplicar aquesta força transversal pot passar que la barra torni a la posició rectilínia o que quedi bombada.

L'experiència mostra que si F és petita la barra tornarà a quedar recta, mentre que quedarà bombada si F és més gran d'un cert valor crític. Aquest resultat, ben conegut pels enginyers, fou estudiat per EULER a l'*Additamentum,* on dóna el valor d'aquesta força crítica en termes de les dimensions de la barra i de les propietats elàstiques del material. Repassarem l'*Additamentum* fins a arribar a la fórmula per a aquesta força.



JOHANN BERNOULLI havia tractat la flexió de cintes elàstiques (Acta Eruditorum Leipzig, 1694, traduït a l'alemany als *Ostwalds Klassiker*) i obtingué una fórmula relacionant la curvatura de la cinta amb el moment flexionant. La fórmula és M = K/R, on R és el radi de curvatura en el punt considerat, M és el moment (par) actuant a la secció de la cinta que passa pel punt considerat i K és una constant que depèn del material i de les dimensions de la secció.

La fórmula és obtinguda sobre la hipòtesi que quan es corba la cinta les "fibres" externes s'estiren seguint la llei de proporcionalitat entre tensió i elongació de HOOKE, mentre que les fibres interiors no s'estiren ni s'escurcen. De fet és com si la barra es compongués de trossos infinitesimals articulats i amb molles, com ho mostra la figura.



D'aquesta anàlisi resulta que la constant K és proporcional al quadrat de c, el gruix de la cinta.

Curiosament resulta que la teoria moderna de l'elasticitat, deguda a CAUCHY i NAVIER, dóna com a conseqüència la proporcionalitat entre el moment i la curvatura, però la constant de de proporcionalitat no és ben bé la de BERNOULLI, car és el producte del mòdul d'elasticitat E, que depèn del material, pel moment d'inèrcia de la secció respecte a l'eix que li passa pel centre de gravetat i normal al pla de la corba, i aquest no és proporcional a c^2, sinó a c^3 si la secció és rectangular.

Amb la fórmula anterior, i fent consideracions d'energia potencial, DANIEL BERNOULLI arriba a dir que l'expressió

$$\int \frac{ds}{R^2}$$

ha d'ésser estacionària quan la cinta flectida es troba en equilibri, i a més ha d'ésser un mínim, si és que aquest equilibri és estable.

Coneixedor D. BERNOULLI del càlcul de variacions que EULER havia desenvolupat (encara no publicat), li suggereix en lletra escrita el 20 d'octubre del 1742:

"Com que ningú no és tan completament el mestre del mètode isoperimètric com vostè, resoldrà molt fàcilment el següent problema en què s'exigeix que

$$\int \frac{ds}{R^2}$$

sigui un mínim".

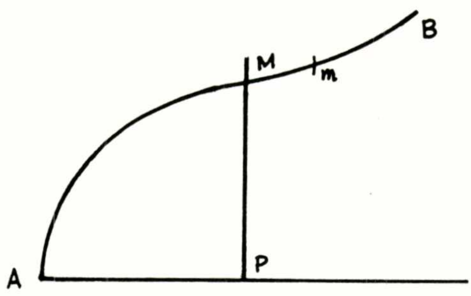
EULER és receptiu al suggeriment, i en la introduccó al seu *"De Curvis Elasticis"*, diu, en dos paràgrafs separats:

"Perquè com la fàbrica de l'univers és la més perfecta, i és el treball del més savi creador, res no passa a l'univers en què alguna relació de màxim o mínim no aparegui. Per tant no hi ha cap dubte que tot efecte a la l'univers pot ésser explicat tan satisfactòriament a partir de causes finals, amb l'ajut del mètode de màxims i mínims, com pot ésser-ho a partir de les causes efectives".

I

"Per tant, veient que el més il·lustre i, en aquesta forma sublim d'estudiar la natura, l'home més perspicaç, DANIEL BERNOULLI, m'ha assenyalat que pot expressar en una sola fórmula, que anomena la força potencial, tota la força continguda en una cinta elàstica corbada, i que aquest expressió ha d'ésser un mínim a la corba elàstica, i com que amb aquest descobriment el meu mètode de màxims i mínims tal com el tenim en aquest llibre ha rebut nova llum d'una manera meravellosa, i la seva més àmplia aplicació és totalment establerta, no puc deixar passar aquesta més desitjada avinentesa sense fer més clares les aplicacions del meu mètode al mateix temps que publico aquesta notable caracteristica de la corba elàstica descoberta pel celebrat BERNOULLI".

El treball comença considerant una cinta elàstica AB com la de la figura



Diu EULER:

"Si la cinta és de secció i elasticitat uniforme i si està recta en la seva posició natural, el caràcter de la corba AM serà tal que l'expressió

$$\int \frac{ds}{R^2}$$

serà un mínim absolut. Com que a R apareixen diferencials del segon ordre, per tal de determinar la corba, necessitarem quatre condicions, i precisament és aquest el subjecte de la nostra recerca. Puix que per A i B es poden flexionar una infinitat de cintes elàstiques de la mateixa llargària, el problema no serà resolt si no és que, a més dels dos punts A i B, uns altres dos punts, o, cosa pràcticament igual, la posició de les tangents a A i B, siguin donats al mateix temps".

Per tant el problema queda expressat així:

"Que, d'entre totes les corbes de la mateixa longitud que no tan sols passen pels punts A i B sinó que també són tangents a les rectes donades en aquests punts, sigui determinada la corba en la qual el valor

$$\int \frac{ds}{R^2}$$

sigui un mínim".

Per resoldre el problema EULER designa AP = x, PM = y, pdx = dy, dp = qdx, Mm = ds = dx $\sqrt{1 + p^2}$; li queda

$$R = \frac{(1 + p^2)^{3/2}}{q}.$$

El que tracta de minimitzar és doncs

$$\int \frac{ds}{R^2},$$

o sigui

$$\int \frac{q^2\,dx}{(1 + p^2)^{5/2}},$$

que designa per $\int Z\,dx$, tot mantenit constant la longitud $\int \sqrt{1 + p^2}\,dx$.

Si dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq, resulta M = 0, N = 0,

$$P = \frac{-5\,pq^2}{(1 + p^2)^{7/2}},\quad Q = \frac{2\,q}{(1 + p^2)}.$$

Aplica ara la coneguda "equació d'EULER" del mètode variacional, tenint en compte que la longitud és constant, i obté

$$\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) - \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right) = \alpha\frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

(Recordem que aquesta equació s'obté del fet que la variació de $\int Z\,dx$ ha d'ésser nul·la en avaluar Z (x, y, p, q) a y (x), p (x) = y' (x), q (x) = y'' (x), i del fet que la variació de la longitud també ha d'ésser nul·la).

Substituint, queda:

$$-\frac{dp}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} = \alpha\frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Aquí α és una constant que, junt amb les que resultin de la integració d'aquesta equació, quedarà determinada en imposar les condicions als extrems.

Integrant, queda:

$$\frac{\alpha p}{\sqrt{1+p^2}} + \beta = p - \frac{dQ}{dx},$$

i una altra vegada:

$$\alpha\sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma = Z - Qq = \frac{-q^2}{(1+p^2)^{5/2}},$$

d'on

$$q = (1+p^2)^{5/4}\sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma} = \frac{dp}{dx}.$$

Això dóna finalment que la corba y (x) ha de satisfer l'equació diferencial

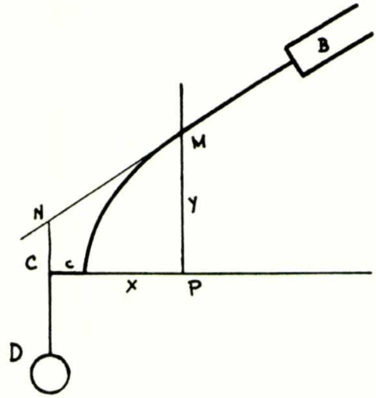
$$dy = \frac{p\,dp}{(1+p^2)^{5/4}\sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2} + \beta p + \gamma}}.$$

En acabat, fent un canvi de coordinades adient, obté la següent equació (on α, β i γ no són les mateixes d'abans):

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}}$$

on la constant apareix en homogeneïtzar p.

Ara, per relacionar les constants que apareixen amb les característiques elàstiques de la cinta, EULER retorna al mètode de BERNOULLI, és a dir, a obtenir la corba a partir de les "causes eficients", que diu ell. Per això considera la cinta fixada, tant en posició com en direcció, a l'extrem B, i una força P aplicada a una barra rígida fixada, a l'extrem A, tant en posició com en angle, i de manera que la força P, al llarg de CD, sigui vertical i perpendicular a la barra rígida CA, de longitud C:



Basant-se en el fet que a tot punt M el radi de curvatura R multiplicat pel moment de les forces a la secció corresponent és igual a la constant elàstica K, que EULER designa per Ek^2, obté

$$P(c+x) = \frac{E\,k^2}{R} = -\frac{E\,k^2\,dx\,d^2y}{(d\,s)^3}.$$

(Notem que la notació de les diferencials de LEIBNIZ mostra aquí els seus avantatges per a les manipulacions formals).

Si aquesta relació s'integra, hom obté

$$P\left(\frac{1}{2}x^2 + cx + f\right) = \frac{-E\,k^2\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}},$$

d'on

$$d\,y = \frac{-\,p\,dx\,(1/2\,x^2 + cx + f)}{\sqrt{E^2 k^4 - p^2 (1/2\,x^2 + cx + f)^2}},$$

que és de la mateixa forma que la trobada pel càlcul de variacions (i semblant a les trobades per J. BERNOULLI uns 50 anys abans).

Veu ara EULER que AM tindria la mateixa forma si hom suprimeix la part MB i fixem a M una barra rígida tangent a M, MN, on apliquem una força de magnitud P, però vertical cap amunt. D'aquí passa a obtenir les constants per a l'equació quan la cinta està sotmesa a pars i forces artitraris als extrems A i B, respectant sempre, és clar, l'equilibri global de forces i pars, si no la cinta es mouria com un tot.

Emprant aquesta equació en el cas d'un par pur aplicat als extrems arriba a l'equació diferencial que, integrada, dóna de solució un arc de cecle de radi

$$\frac{E\,k^2}{M},$$

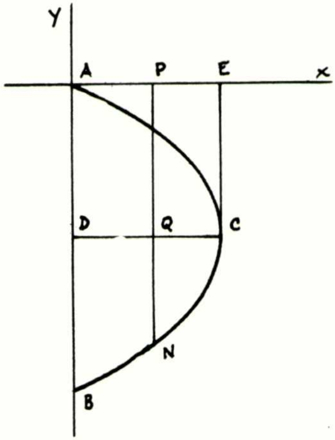
on M és el moment del par.

Si ara es considera el cas d'una cinta amb una força, no un par, a un dels extrems, i hom elegeix convenientment les coordenades, l'equació es pot posar en la forma

$$d\,y = \frac{(a^2 - c^2 + x^2)\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2\,a^2 - c^2 + x^2)}}, \text{ on } c^2 = a^2 - \alpha.$$

La situació és ara la de la figura que segueix, en què A és a l'origen i la força P està dirigida en la direcció AD amb una intensitat

$$\frac{2\,E\,k^2}{a^2}.$$



Si $x = 0$ tenim que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - c^2}{c\sqrt{2a^2 - c^2}}$$

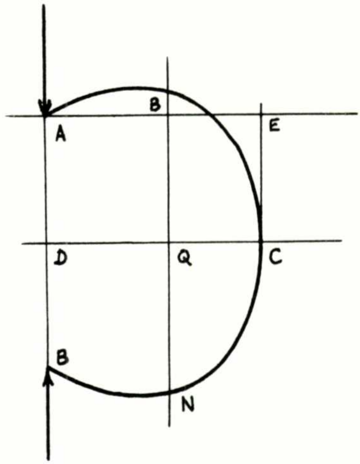
és el pendent de l'elàstica a l'origen, i el sinus de l'angle que forma amb AP és

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2}.$$

Per tant, si $a^2 = \infty$, la cinta estarà recta i perpendicular a AP, essent nul·la la força

$$\frac{2Ek^2}{a^2}.$$

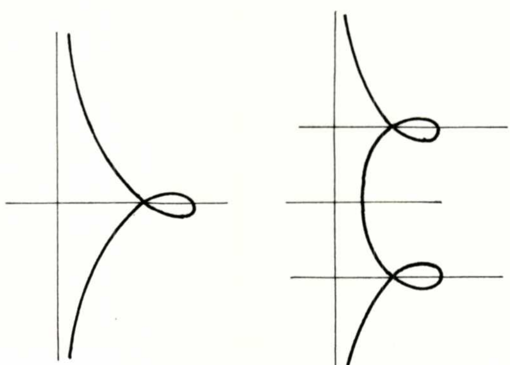
Quan a va disminuint, és a dir, quan va augmentant la força, l'angle amb AP va disminuint, i quan $a^2 = c^2$, es fa zero, per a passar al 1er quadrant si continua creixent la força, com ho indica la figura següent:



Quan a, decreixent, tendeix a

$$\frac{c^2}{2},$$

l'elàstica tendeix a ésser asimptòtica a l'eix de les ordenades, com ho mostra la figura, on hom ha dibuixat també solucions amb més nombre de "bagues" per forces més grans:



Veiem que si $x = c$ el pendent de l'elàstica és infinit, raó per la qual $AE = c$ a la figura. També tenim que a A la curvatura és nul·la (par nul a la secció), mentre que es fa màxim a C (màxim moment de la força aplicada). Això justifica els dibuixos que hem fet.

Si volem determinar la distància EC haurem d'integrar l'equació, i el mateix passa si volem calcular la longitud de la corba.

Aquí EULER diu que l'equació diferencial no admet integració i que tractarà de donar-ne una solució aproximada, cosa que fa emprant sèries de potències (notem que la integral que tenim és el·líptica, i que, efectivament, no és expressable en termes de funcions elementals).

Obté així que la longitud de l'arc AC és

$$\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1+\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{c^2}{2a^2}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{c^4}{4a^4}+\ldots\right), \text{ i}$$

$$AD=\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1-\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{c^2}{2a^2}-\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{c^4}{4a^4}-\ldots\right).$$

Per tant si donem $AE = c$ i $AD = b$, a partir d'això obtenim la constant a i el llarg de la corba. I inversament, donada la longitud i la força, que ens dóna el valor de la constant a conegut $E k^2$, obtenim AD i CD.

EULER fa notar que l'elàstica recta correspon a $c = 0$ o bé a

$$\frac{a}{c}=\infty .$$

Aquí ens agrada de traduïr-lo:

"... i a aquesta primera classe (cinta recta), referim aquells casos en què c és una quantitat infinitament petita, de tal manera que comparada amb a es pot considerar a punt de desaparèixer. Tanmateix, com que x no pot ésser més gran que c, x igualment estarà a punt de desaparèixer en comparació amb a, i per tant resultarà la següent equació:

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2(c^2 - x^2)}}.$$

La integral d'això és

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ arc } \sin\frac{x}{2},$$

que és l'equació d'una trocoide (avui sinusoide) infinitament allargada. Ara AD es tornarà igual a

$$\frac{\pi a}{2\sqrt{2}},$$

del qual el llarg de la corba difereix només infinitesimalment, ja que l'angle DAM és infinitament petit. Sigui el llarg de la cinta ACB = 2 f, i la seva elasticitat absoluta E k^2. Com que

$$f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}},$$

la força requerida per a produir aquesta curvatura infinitament petita de la cinta serà de magnitud finita i serà igual a

$$\frac{E k^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4};$$

és a dir, si les extremitats A i B estan lligades entre elles amb un cordó AB, el cordó estarà estirat am la força

$$\frac{E k^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}».$$

I d'aquesta manera Euler obté la seva famosa fórmula, que aplica, una mica més endavant, al bombament de columnes que suporten un pes:

"Per tant, sempre que la càrrega P que (la columna) suporta no sigui més gran que

$$\frac{E\,\pi^2\,k^2}{9^2}$$

(aquí a és l'altura, 2 f, de la columna), no hi haurà cap por de bombament; d'altra banda, si el pes P és més gran, la columna serà incapaç de resistir el bombament.

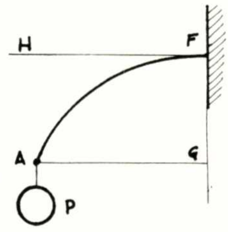
Més endavant tracta el cas de columnes empotrades a tots dos extrems (és a dir, impedides de girar als extrems); llavors la força crítica resulta quatre vegades més gran.

Immediatament després dóna una manera pràctica de calcular el terme E k^2 per a un cinta d'un material i una secció donats:

Hom penja un pes P de la cinta empotrada horitzontalment, com a la figura, i hom té, emprant l'equació diferencial en el cas límit en què P és infinitament petit,

$$E\,k^2 = \frac{Pg^2\,(2\,g-3\,h)}{6\,h},$$

on f és la longitud de la barra i h és la deflexió FG.



I aquí EULER comenta el fet que E k^2 depèn del caràcter del material de la barra i de les dimensions de la secció dient que és proporcional a l'amplada (la dimensió ortogonal al pla de l'elàstica) i "li sembla que" al quadrat del gruix (com J. BERNOULLI cinquanta anys abans). Això no coincideix amb la fórmula actual E k^2 = EI, on E és el mòdul de YOUNG del material (allargament específic degut a tensió) i I el moment d'inèrcia, que en el cas d'una secció rectangular val

$$\frac{a\,b^3}{12},$$

si a és l'ample i b el gruix.

Notem però que en el temps d'EULER hom no comptava encara amb una bona teoria de la flexió de barres elàstiques que permetés deduir que k^2 és precisament I, si més no per a petites deformacions.

Parlarem ara del treball d'EULER sobre turbines hidràuliques de reacció.

L'interès d'EULER en la mecànica de fluids l'acompanyà tota la vida, tant en els aspectes més pràctics com en els més teòrics. Ja entre 1727 i 1737 s'ocupà del so i de la física de l'aire. El 1745 escriu sobre els Principis d'Artilleria i el 1750 sobre el moviment de l'aigua als rius. A Sant Petersburg, el 1749, escriu la seva *Scientia Navalis,* que conté un primer volum sobre la teoria de l'equilibri de cossos flotants i de l'estabilitat d'aquest equilibri, i un segon volum aplicant aquesta teoria a la construcció i les maniobres dels vaixells. Més endavant escriu els seus tres articles sobre turbines hidràuliques, fent l'anàlisi de la turbina proposada per JOAN VON SEGER, professor de Göttingen, el 1750 (que fou construïda i que feia anar un molí de gra al nord de la ciutat,segons M. RÜHLMANN a "*Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik*", Leipzig, 1885). Aquests articles són cada vegada més matematitzats i hom hi pot veure com simultàniament es resolen problemes de disseny de turbines i es va bastint la teoria de la dinàmica dels fluids incompressibles. Aquests tres treballs són escrits a partir del 1750 i culminen en la "*Théorie plus complete des machines que sont mises en mouvement par la réaction de l'eau*", llegit a l'Acadèmia de Berlín el 13 de setembre del 1753, que ho publicà el 1754 (una traducció a l'alemany d'aquest treball es troba a la Biblioteca de Catalunya a la col·lecció dels *Ostwalds Klassiker* ja esmentada). L'any següent, el 1755, l'Acadèmia de Barlín li publica els "*Principes Généraux du mouvement des fluides*", on apareixen per primera vegada les equacions en derivades parcials del moviment dels fluids, que avui porten el seu nom. En fi, fa la síntesi de la teoria de fluids al seu "*Traité de mécanique des fluides*", publicat el 1766.

EULER no és el primer de tractar de la mecànica de fluids ni de fer-hi servir les equacion en derivades parcials; d'Alembert ja no ha fet, això. DANIEL BERNOULLI havia escrit la "Hydrodinamica" el 1738 i JOHANN BERNOULLI la "Hydraulica" el 1743. Però és EULER qui adopta el punt de vista que permet sintetitzar la teoria.

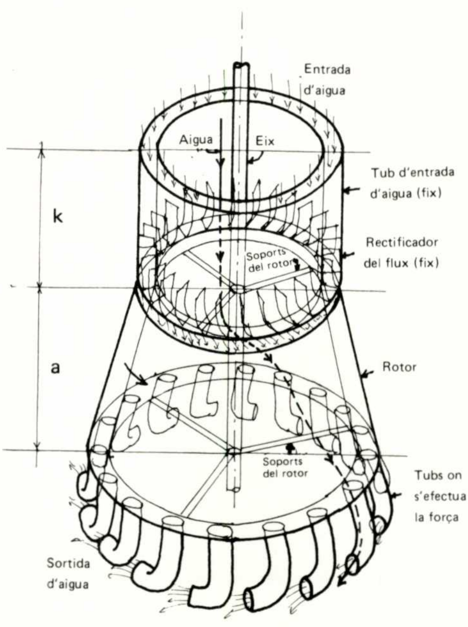
Ell mateix diu:

"Per sublims que siguin les recerques sobre fluids que debem als Srs. BERNOULLI, CLAIRANT i D'ALEMBERT, aquestes se segueixen naturalment de les meves dues admirables fórmules generals, a les quals vaig ser portat immediatament pels primers axiomes de la mecànica".

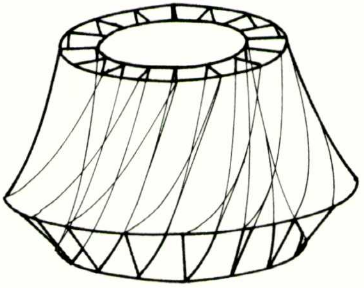
Un dels factors que facilitaren a l'EULER la derivació de les fórmules de la teoria de fluids fou el considerar, en comptes de les seccions transversals dels seus predecessors, els "tubs de flux", formats per les trajectòries del fluid, en el si del líquid. Podria ser que la idea de considerar aquests tubs de flux li hagués estat suggerida pel seu estudi de les turbines, on, efectivamenjt, l'aigua és forçada a moure's per tubs de forma laminar.

La turbina que Euler estudia és del tipus dit de reacció: el moment que fa girar la màquina al voltant del seu eix és produït per la reacció de l'aigua en canviar de velocitat dins tubs corbats. Aquests tubs van montats a un rotor amb eix vertical, i l'aigua entra per la part superior provenint d'una canonada.

Aquest canonada, que almenys en la part inferior és de secció anular, acaba en rectificador del flux, que consisteix en uns deflectors metàl·lics que, sense turbulències, orienten l'aigua de manera que entri al rotor amb el component horitzontal de la velocitat igualant la velocitat de gir de la part superior del rotor. La component vertical estarà determinada de manera que la velocitat total sigui la deguda a la caiguda sota l'acció de la gravetat des d'una altura k, que "és l'altura del nivell lliure de l'aigua que alimenta la turbina".



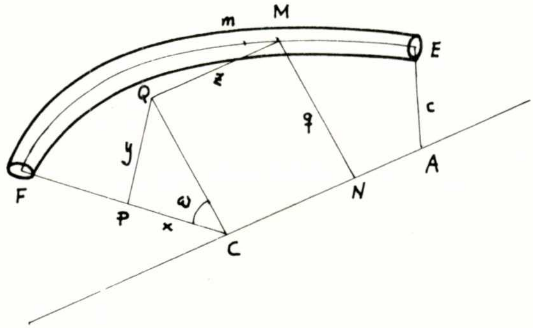
El rotor que fa girar l'eix on va montat el molí, o allò que hom vulgui moure, també és de secció anular i de forma general troncocònica. Els tubs corbats estan muntats a la part inferior, amb l'eix a la sortida horitzontal, perquè l'aigua quan en surti ho faci amb velocitat nul·la (respecte al sistema quiet), i d'aquesta manera s'hagi aprofitat al màxim l'energia potencial d'aquesta aigua. La sortida dels tubs serà per tant horitzontal. A dins de la carcassa del rotor els tubs no continuen, però l'anàlisi que EULER fa els considera com si tinguessin l'entrada a la part superior del rotor, és a dir, els prolonga virtualment seguint les línies de flux. De fet hom podria dissenyar la turbina amb els tubs continuats al llarg de tot el rotor, o, com es fa ara en les turbines de reacció, els tubs poden ésser l'espai entre deflectors que van de dalt a baix en la forma que mostra la figura següent.



Aquest disseny representa un avenç de molts anys, puix que no fou fins el 1824 que aquesta manera d'accionar una màquina per reacció fou redescoberta per BURDIN, que li donà el nom de "turbina". La turbina de reacció, amb les millores introduïdes per EULER, no fou construïda al temps d'EULER. Ho fou, seguint els seus dibuixos, l'any 1944 per ACKERET, que comprovà que funcionava eficaçment.

EULER divideix el treball que estem considerant en la solució de dotze problemes graduals, que culminen en el càlcul dels paràmetres de disseny de la turbina.

El primer problema considera un tub que gira amb velocitat angular donada al voltant d'un eix AC. Suposem donada la velocitat relativa de l'aigua en una secció del tub. Es tracta de trobar el moviment de l'aigua, absolut i relatiu, en una altra secció. (Notem que hom no pressuposa que el tub sigui de secció constant ni que la velocitat de gir no depengui del temps).



Per resoldre el problema EULER considera un tub com el de la figura, on E és l'entrada d'aigua i F la sortida. AC és l'eix de rotació. b, c i q són els "radis" que, perpendicular a l'eix, van a F, E i M (un punt genèric del tub) respectivament. f^2 és l'àrea de la secció del tub a M. H és l'angle que forma la direcció del tub a M (tangent a la línia de flux per M) amb la direcció del moviment (normal al pla MNC). Amb $\sqrt{v}$ hom designa la velocitat relativa de l'aigua a M respecte al tub, i amb $\sqrt{u}$ la velocitat de F respecte al nostre sistema de referència (quiet). El diàmetre del tub a M és r. Hom denota Mm = ds, l'element de longitud.

$$v_r(M) = \frac{f^2(v)}{r^2}$$

en la direcció Mm.

La velocitat deguda al gir a M és

$$\frac{q\sqrt{u}}{r^2},$$

i hom obté la velocitat absoluta en tres components:

$$\text{al llarg de } CQ \quad = \frac{f^2\sqrt{u}}{r^2}\,\frac{dq}{ds}\;;$$

$$\text{al llarg de } Qq \quad = \frac{f^2\sqrt{v}}{r^2}\cos H + \frac{q\sqrt{u}}{b}\;;$$

$$\text{al llarg de } QM \quad = \frac{f^2\sqrt{v}}{r^2}\,\frac{dz}{ds}\;.$$

Com a segon problema es proposa trobar les forces d'inèrcia. Diu:

"Quan canviem la velocitat relativa de l'aigua, així com la del tub, llavors cada partícula experimenta un canvi en el seu moviment, i per generar aquest canvi s'imposen forces".

Escriu així (nosaltres hem simplificat la notació de les derivades respecte al temps emprant "primes"):

$$F_{CQ} = 2\,m\,(q'' - q\,(\varphi' + w')^2),$$

$$F_{Qq} = 2\,m\,(2\,q'\,(\varphi' + w') + q\,(\varphi'' + w''),$$

$$F_{QM} = 2\,m\,z'',$$

on m és "la massa de l'aigua a M" (de fet veiem que, en les nostres unitats, és la meitat de la massa de la partícula d'aigua sobre la qual actua F situada a M).

Notem que aquí EULER empra, naturalment, la segona llei de NEWTON, i que li apareix, també naturalment, l'acceleració avui dita de Coriolis, que la explicità el 1823, i que ja havia aparegut, abans que a EULER, a CLAIRAUT.

Substituint

$$\varphi' = \frac{\sqrt{u}}{b}, \ w' = \frac{f^2 \cos Ⓗ}{q\, r^2} \sqrt{v},$$

$$\varphi'' = \frac{1}{2\, b \sqrt{u}}\, u', \ w'' = \frac{f^2 \cos Ⓗ}{2\, q\, r^2 \sqrt{v}}\, v' + f^2 \sqrt{v}\, \frac{d}{dt} \left(\frac{\cos Ⓗ}{q\, r^2} \right),$$

hom obté les forces d'inèrcia:

$$F_{CQ} = 2\, m \ \left(q'' - q \left(\frac{\sqrt{u}}{b} + \frac{f^2 \cos Ⓗ}{q\, r^2} \sqrt{v} \right) \right.$$

$$= 2\, m \ \left(2\, q' \left(\frac{\sqrt{u}}{b} + \frac{f^2 \cos Ⓗ}{q\, r^2} \sqrt{v} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{q}{2\, b \sqrt{u}}\, u' + \frac{f^2 \cos Ⓗ}{2\, r^2 \sqrt{v}} \ v' + f^2\, q \sqrt{v} \ \ \frac{d}{dt}\, \frac{\cos}{q\, r^2} \right)$$

$$F_{QM} = 2\, m\, z''.$$

També dóna altres expressions eliminant q' i q'' en termes del moviment del rotor i de

$$\frac{dq}{ds}.$$

El tercer problema és de calcular el moment de les forces d'inèrcia respecte a l'eix de gir. Per fer això calcula primer el moment de les forces d'inèrcia que hem calculat i integra respecte a s, la longitud del tub, posant $m = r^2\, ds$ (tot és un problema d'unitats de massa i de longitud!).

Obté així per al moment l'expressió

$$\frac{1}{\sqrt{u}}\, u' \int \frac{q^2 r^2}{b}\, ds + \frac{1}{\sqrt{v}}\, v' \int f^2 q \cos Ⓗ \, ds +$$

$$+ 2v \frac{f^4 q \cos Ⓗ}{r^2} + \sqrt{vu}\, \frac{f^2 q^2}{b} + \text{const.}$$

El quart problema consisteix a, considerant l'eix vertical, i un moviment de rotació arbitrari respecte a aquest eix, trobar el moment de forces de reacció.

Aquestes forces de reacció, exercides per les parets del tub sobre l'aigua, es consideren normals a les parets del tub i són degudes a les forces d'inèrcia i a les "internes". Aquí EULER fa la reflexió que com no hi ha pistó que premi l'aigua, les forces internes degudes a la pressió només depenen del pes de l'aigua i per tant llur resultant és vertical i, doncs, el moment degut a les forces internes és nul!

Queda doncs que el moment de les forces de reacció és igual i de signe contrari al que acabem de determinar.

Veiem que amb això ja en té prou per a saber quin moment exerceix el rotor degut a la reacció de l'aigua en els tubs, i per tant per a decidir els paràmetres fonamentals del disseny, però ara vol optimitzar, és a dir, vol que la velocitat de sortida de l'aigua a F sigui nul·la; per tant, ha d'ajustar la velocitat de rotació de la màquina.

En el cinquè problema es tracta, a partir de les forces d'inèrcia, de trobar l'acceleració relativa de l'aigua (en la direcció Mm). Per això es calcula la component de la força d'inèrcia en el punt M en la direcció Mm. Després d'unes simplificacions obté per a l'acceleració:

$$\frac{q \cos Ⓗ}{b} \quad \frac{u'}{\sqrt{u}} + \frac{f^2}{r^2} \frac{v'}{\sqrt{v}} \quad \frac{2uq}{b^2} \frac{dq}{ds} + vf^4 \frac{d}{ds} \frac{1}{r^4}.$$

Si la velocitat de gir és constant i el tub és de secció constant, resulta que u' i v' són nul·les i l'expressió queda reduïda a

$$-u\,\frac{2q}{b^2}\frac{dq}{ds}-v\,\frac{4f^4}{r^5}\frac{dr}{ds}.$$

El sisè problema és el de calcular les forces internes, que són la suma de les forces de cos (gravetat en aquest cas) i la pressió. (Notem que EULER és el primer que explicita clarament les diferents forces que cal considerar en l'anàlisi dels fluids).

Aquestes forces internes han d'ésser tals que llur gradient (que en aquest cas serà la derivada respecte a la longitud s del tub) iguali la component de les forces d'inèrcia al llarg del tub en el punt considerat, és a dir, l'expressió acabada d'obtenir s'ha d'igualar, canviada de signe, a

$$\frac{dp}{ds}+\frac{dz}{ds}$$

(està considerant l'eix vertical).

Integrant respecte a S i suposant que a és la càrrega, és a dir, l'altura de l'entrada de l'aigua al rotor sobre la sortida F del tub, resulta que a M la pressió serà donada per

$$p=a-z+u\left(\frac{q^2}{b^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)-v\left(\frac{f^4}{r^4}-\frac{f^4}{c^4}\right)-$$
$$-\frac{1}{u}u'\int\frac{q\cos \Theta}{b}\,ds-\frac{1}{\sqrt{v}}v'\int\frac{f^2}{r^2}ds.$$

En aquest punt EULER fa notar que la pressió pot esdevenir negativa, provocant el que avui hom coneix amb el nom de cavitació: formació de gas als tubs.

A partir d'aquí ataca el setè problema, que consisteix a trobar la velocitat de sortida de l'aigua per F, on sap que la pressió és nul·la (l'atmosfèrica).

Obté

$$v = \frac{a - u\left(\frac{d^2}{b^2} - 1\right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}}.$$

En el vuitè problema considera un transitori, que sembla irrelevant per al disseny de la turbina:

Suposant que la turbina gira amb velocitat uniforme i que la càrrega és a, trobar com varia la velocitat de sortida de l'aigua en funció del temps, quan hom destapa la sortida del tub, que suposa tancada en un principi.

En els següents problemes ataca plenament el disseny:

1. Donada la velocitat de la turbina (uniforme), i la càrrega (desnivell de l'aigua), trobar el cabal i la velocitat de sortida de l'aigua (amb la seva direcció).

10. Trobar les magnituds d'una turbina donada la càrrega i el cabal d'aigua.

11. Donada la velocitat de la turbina trobar el moment de reacció i per tant la potència.

12. Trobar les condicions necessàries per a fer màxima la potència amb una càrrega i un cabal donats. (Això vol dir fer mínima la velocitat de sortida de l'aigua, que, de fet, es pot fer zero).

Per finalitzar el seu treball, EULER fa els càlculs necessaris per a cinc exemples. El darrer consisteix a trobar els paràmetres de disseny d'una turbina si el desnivell de l'aigua és de 8 peus i el cabal de 10 peus cúubics per segon. Obté, prenent a = 3 peus i k = 5 peus (vegeu el dibuix de la turbina), que e^2 = 1,26490 peus quadrats, f^2 = 0,42163 peus quadrats i, si pren c = 2 peus i b = 3 peus, que el període de gir és de 0,79476. Si hom vol un període més gran s'ha de fer el rotor de més diàmetre. La potència, si hom no té en compte les pèrdues, és d'aproximadament 10 cavalls de vapor.